Tableaux escalier

S. Dasse-Hartaut

Liafa, Paris Diderot

March 7, 2012

Un tableau escalier de longueur *n* (S. Corteel, L. Williams)

Un tableau escalier de taille n est un tableau de n lignes t.q. la i-ème ligne est de longueur $(n-i+1)$. On remplit la diagonale et certaines cases du tableau avec des α, β, γ et δ.

	β			α		γ
		α			γ	
				δ		
	δ		α			
		δ				
	β					
γ						

Un tableau escalier de longueur n (S. Corteel, L. Williams)

Un tableau escalier de taille n est un tableau de n lignes t.q. la i-ème ligne est de longueur $(n - i + 1)$. On remplit la diagonale et certaines cases du tableau avec des α, β, γ et δ.

u	β	u	u	α	q	γ
q	u	α	u	u	γ	
q	q	q	q	δ		
q	δ	u	α			
q	q	δ				
u	β					
γ						

Les règles

- A gauche d'un β on met un u.
- A gauche d'un δ on met un q.
- Au dessus d'un α ou d'un δ on met un u.
- Au dessus d'un β ou d'un γ on met un q.

Un tableau escalier de longueur n (S. Corteel, L. Williams)

Un tableau escalier de taille n est un tableau de n lignes t.q. la i-ème ligne est de longueur $(n-i+1)$. On remplit la diagonale et certaines cases du tableau avec des α, β, γ et δ.

u	β	u	u	α	q	γ
q	u	α	u	u	γ	
q	q	q	q	δ		
q	δ	u	α			
q	q	δ				
u	β					
γ						

- $\mathrm{wt}(T)=\alpha^3\beta^2\gamma^3\delta^3q^9u^8$
- $Z_n(\alpha,\beta,\gamma,\delta,q,u)=\sum_{T\in T_n}\mathrm{wt}(T)$

Lignes indexées

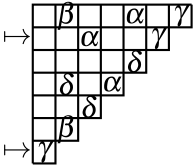
Définition

Une ligne indexée par la lettre x est une ligne dont la première lettre grecque en partant de la gauche est un x. On note $L(T)$ le nombre de lignes du tableau T de taille n qui sont indexées par α ou par γ.

Lignes indexées

Définition

Une ligne indexée par la lettre x est une ligne dont la première lettre grecque en partant de la gauche est un x. On note $L(T)$ le nombre de lignes du tableau T de taille n qui sont indexées par α ou par γ.



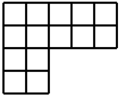
Lignes indexées par α/γ

Tree-like tableaux

Un Tree-like tableau de taille n (J.-C. Aval, A. Boussicault, P. Nadeau)

Un TLT de taille n est un diagramme de Ferrers de demi-périmètre $n+1$ où chaque cellule peut être remplie d'un point, de telle manière que :

- il y a un point dans la cellule en haut à gauche
- pour chaque autre cellule c contenant un point, il y a une cellule contenant un point soit au dessus de c soit à sa gauche
- on trouve au moins un point dans chaque colonne et dans chaque ligne

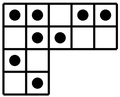


Tree-like tableaux

Un Tree-like tableau de taille n (J.-C. Aval, A. Boussicault, P. Nadeau)

Un TLT de taille n est un diagramme de Ferrers de demi-périmètre $n+1$ où chaque cellule peut être remplie d'un point, de telle manière que :

- il y a un point dans la cellule en haut à gauche
- pour chaque autre cellule c contenant un point, il y a une cellule contenant un point soit au dessus de c soit à sa gauche
- on trouve au moins un point dans chaque colonne et dans chaque ligne

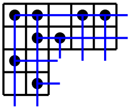


Tree-like tableaux

Un Tree-like tableau de taille n (J.-C. Aval, A. Boussicault, P. Nadeau)

Un TLT de taille n est un diagramme de Ferrers de demi-périmètre $n+1$ où chaque cellule peut être remplie d'un point, de telle manière que :

- il y a un point dans la cellule en haut à gauche
- pour chaque autre cellule c contenant un point, il y a une cellule contenant un point soit au dessus de c soit à sa gauche
- on trouve au moins un point dans chaque colonne et dans chaque ligne



Bijection

Bijection

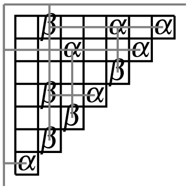
Il y a bijection entre les TLTs de taille $n+1$ et les tableaux escaliers de taille n sans γ ni δ.

	β			α		α
		α			α	
				β		
	β		α			
		β				
	β					
α						

Bijection

Bijection

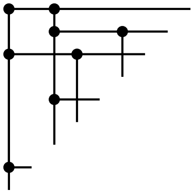
Il y a bijection entre les TLTs de taille $n+1$ et les tableaux escaliers de taille n sans γ ni δ.



Bijection

Bijection

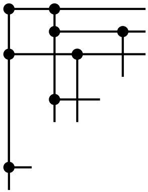
Il y a bijection entre les TLTs de taille $n+1$ et les tableaux escaliers de taille n sans γ ni δ.



Bijection

Bijection

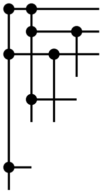
Il y a bijection entre les TLTs de taille $n+1$ et les tableaux escaliers de taille n sans γ ni δ.



Bijection

Bijection

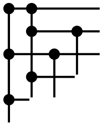
Il y a bijection entre les TLTs de taille $n+1$ et les tableaux escaliers de taille n sans γ ni δ.



Bijection

Bijection

Il y a bijection entre les TLTs de taille $n+1$ et les tableaux escaliers de taille n sans γ ni δ.



Bijection (avec J.-C. Aval et A. Boussicault)

Bijection

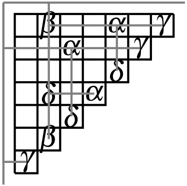
On peut généraliser la bijection au cas avec γ et δ

	β			α		γ
		α			γ	
				δ		
	δ		α			
		δ				
	β					
γ						

Bijection (avec J.-C. Aval et A. Boussicault)

Bijection

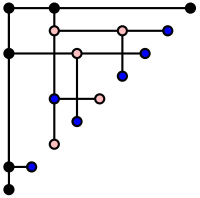
On peut généraliser la bijection au cas avec γ et δ



Bijection (avec J.-C. Aval et A. Boussicault)

Bijection

On peut généraliser la bijection au cas avec γ et δ

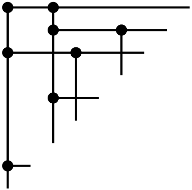


Génération des Tree-like tableaux

- Trouver le point spécial
- Si à gauche du point spécial, ajouter un ruban

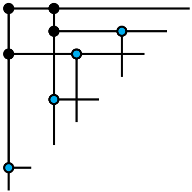
Génération des Tree-like tableaux

Trouver le point spécial



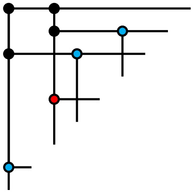
Génération des Tree-like tableaux

Trouver le point spécial



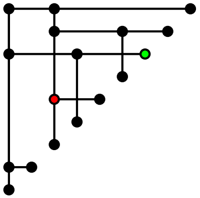
Génération des Tree-like tableaux

Trouver le point spécial



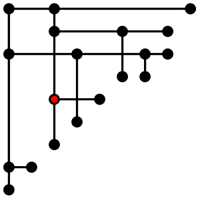
Génération des Tree-like tableaux

Premier cas : ajout à droite du point spécial



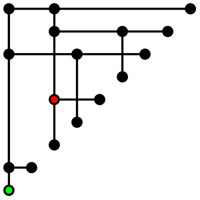
Génération des Tree-like tableaux

Premier cas : ajout à droite du point spécial



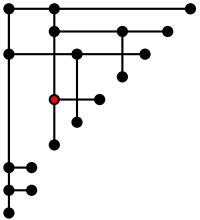
Génération des Tree-like tableaux

Second cas : ajout à gauche du point spécial



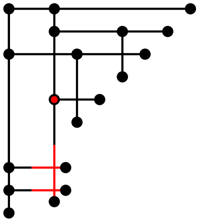
Génération des Tree-like tableaux

Second cas : ajout à gauche du point spécial



Génération des Tree-like tableaux

Second cas : ajout à gauche du point spécial



Génération des Tree-like tableaux

- Le nouveau point spécial est le point choisi
- On peut remonter l'algorithme

Avec les TLTs (et q=1)

- La génération est plus simple avec les TLTs
- On retrouve facilement certains résultats

Des récurrences

	Tableaux escaliers (n)	TLT ($n+1$)
quoi	colonne de gauche	une feuille
en fonction de	$L(T)$	nombre de feuilles
donne	$2^{L(T)+1}$	$n+1$
donne	$4\times 3^{L(T)}$	$4n$

Nombre de tableaux escaliers de taille n

TE sans γ/δ taille $n \Leftrightarrow$ TLT de taille $n+1$

Nombre de tableaux escaliers de taille n

TE sans γ/δ taille $n \Leftrightarrow$ TLT de taille $n+1$

$T_n = (n+1) \times T_{n-1} = (n+1)!$

Nombre de tableaux escaliers de taille n

TE sans γ/δ taille $n \Leftrightarrow$ TLT de taille $n+1$

$T_n = (n+1) \times T_{n-1} = (n+1)!$

TE taille $n \Leftrightarrow$ TLT "colorés"de taille $n+1$

Nombre de tableaux escaliers de taille n

TE sans γ/δ taille $n \Leftrightarrow$ TLT de taille $n+1$

$T_n = (n+1) \times T_{n-1} = (n+1)!$

TE taille $n \Leftrightarrow$ TLT "colorés"de taille $n+1$

$T_n = 4n \times T_{n-1} = 4^n n!$

Nombre de tableaux escaliers de taille n

TE sans γ/δ taille $n \Leftrightarrow$ TLT de taille $n+1$

$T_n = (n+1) \times T_{n-1} = (n+1)!$

TE taille $n \Leftrightarrow$ TLT "colorés"de taille $n+1$

$T_n = 4n \times T_{n-1} = 4^n n!$

$$Z_n = (\alpha+\gamma+\beta+\delta+(n-1)(\alpha+\gamma)(\beta+\delta))Z_{n-1}$$

Nombre de tableaux escaliers de taille n

TE sans γ/δ taille $n \Leftrightarrow$ TLT de taille $n+1$

$T_n = (n+1) \times T_{n-1} = (n+1)!$

TE taille $n \Leftrightarrow$ TLT "colorés"de taille $n+1$

$T_n = 4n \times T_{n-1} = 4^n n!$

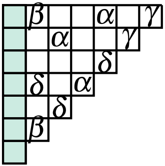
$$Z_n = (\alpha+\gamma+\beta+\delta+(n-1)(\alpha+\gamma)(\beta+\delta))Z_{n-1}$$

$$Z_n = \prod_{k=0}^{n-1}(\alpha+\gamma+\beta+\delta+k(\alpha+\gamma)(\beta+\delta))$$

Un problème de comptage

Problème

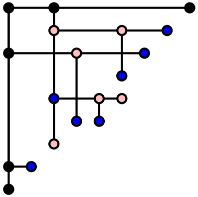
Combien y a-t-il de tableaux escaliers de taille n sans γ possédant k α ou δ sur la diagonale?



Un problème de comptage

Problème

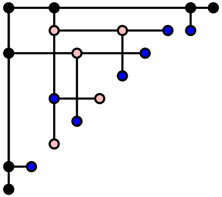
Combien y a-t-il de tableaux escaliers de taille n sans γ possédant k α ou δ sur la diagonale?



Un problème de comptage

Problème

Combien y a-t-il de tableaux escaliers de taille n sans γ possédant k α ou δ sur la diagonale?



Un problème de comptage

Problème

Combien y a-t-il de tableaux escaliers de taille n sans γ possédant k α ou δ sur la diagonale?

cas	feuille créée	$\sharp$	k'
Feuille haute	β	1	k
Feuille haute	δ	1	$k+1$
Feuille gauche	α	1	$k+1$
Feuille α/δ	α,β	k	k
Feuille α/δ	α,δ	k	$k+1$
Feuille β	α,β	$n-k$	$k+1$
Feuille β	α,δ	$n-k$	$k+2$

Un problème de comptage

Problème

Combien y a-t-il de tableaux escaliers de taille n sans γ possédant k α ou δ sur la diagonale?

ajouts	$\sharp$
0	$k+1$
1	$n+2$
2	$n-k$

Un problème de comptage

Problème

Combien y a-t-il de tableaux escaliers de taille n sans γ possédant k α ou δ sur la diagonale?

ajouts	$\sharp$
0	$k+1$
1	$n+2$
2	$n-k$

$$P_{n+1}(k) = (k+1)P_n(k) + (n+2)P_n(k-1) + (n-k+2)P_n(k-2)$$

Un problème de comptage

Problème

Combien y a-t-il de tableaux escaliers de taille n sans γ possédant k α ou δ sur la diagonale?

ajouts	$\sharp$
0	$k+1$
1	$n+2$
2	$n-k$

$$P_{n+1}(k) = (k+1)P_n(k) + (n+2)P_n(k-1) + (n-k+2)P_n(k-2)$$

On note $Q_n(x) = \sum P_n(k)x^k$ et $Q(x,t) = \sum Q_n(x)\frac{t^n}{n!}$

$$Q_n(x) = (1+(n+1)x+(n-1)x^2)Q_{n-1}(x) + (x-x^3)Q'_{n-1}(x)$$

$$(1+2x)Q(x,t) + (x^2t+xt-1)\frac{dQ(x,t)}{dt} + (x-x^3)\frac{dQ(x,t)}{dx} = 0.$$

Dans le cas général?

Comprendre la combinatoire des q-analogues derrière les tableaux escaliers.

$\gamma = \delta = 0$

- $\gamma = \delta = 0$: $q \Leftrightarrow$ croisements
- cas plus général : devient compliqué.

Si $\alpha = \delta = 0$

1	2	3	4	5	6
		γ			γ
				β	
	β		γ		
		β			
	β				
γ					

Si $\alpha = \delta = 0$

1	2	3	4	5	6	7
		γ			γ	
				β		
	β		γ			
		β				
	β					
γ						

Si $\alpha = \delta = 0$

1	2	3	4	5	6	7
	γ			γ		γ
		γ			γ	
				β		
	β		γ			
		β				
	β					
γ						

Avec n γ

- Il y a bijection entre les tableaux escaliers de taille n sans α/δ et avec n γ et les permutations de taille n.
- Le nombre de q, le nombre de lignes indexées par γ deviennent le nombre d'inversions et le nombre de minimas de gauche à droite
- La statistique du nombre de β sur la diagonale est la même que celle des descentes des permutations.
- $Z_n(\beta,\gamma,q)=\prod_{i=0}^{n-1}(\beta+\gamma q^i+\sum_{j=0}^{i-1}\beta\gamma q^j)$

Bijection entre tableau et table d'inversion

- On numérote les γ
- On compte le nombre de q immédiatement à gauche de chaque γ
- On en déduit une table d'inversion

Bijection entre tableau et table d'inversion

1	2	3	4	5	6	7
	γ			γ		γ
		γ			γ	
				β		
	β		γ			
		β				
	β					
γ						

$\Leftrightarrow$

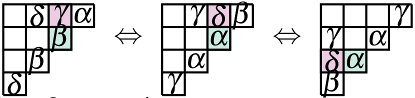
1	2	3	4	5	6	7
0	1	2	1	2	2	1

Si $\beta = -\delta$

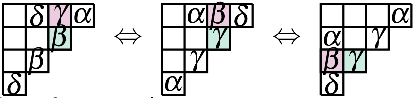
$$Z_n = \prod_{0 \leq k \leq n-1} (\alpha + \gamma q^k) \text{ (preuve par le calcul)}$$

		q			q	α
		q			γ	
		q		α		
		q	α			
		γ				
	α					
α						

- $Z_n(\alpha,\beta,\gamma,\delta,1,1) = Z_n(\beta,\alpha,\delta,\gamma,1,1)$



- $Z_n(\alpha,\beta,\gamma,\delta,1,1) = Z_n(\delta,\gamma,\beta,\alpha,1,1)$



- $Z_n(\alpha,\beta,\gamma,\delta,q,u) = Z_n(\delta,\gamma,\beta,\alpha,u,q)$

Conclusion

Nombre de lignes indexées par α/γ	nombre de cycles
Nombre de α/γ sur la diagonale	lié au nombre de descentes
q-analogues	lié croisements/inversions

Cas général?

Conclusion

- si $\delta=0$, début d'une approche combinatoire (chaîne de Markov)
- polynôme générateur en fonction du type? (cf Williams, Thibon, Novelli, cas $\alpha=\beta=1$, $\gamma=\delta=0$)
-
  - $Z_n(\alpha,\beta,\gamma,\delta,q,u)=Z_n(\delta,\gamma,\beta,\alpha,u,q)$
  - $\beta=-\delta$
  - Chaine de Markov pour $\delta=0$. Si $\delta\neq 0$?